Analiz III Final Sınavı Yanıt Anahtarı

1) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{(x-\cos\alpha)\sqrt{x^2-1}}$, $0<\alpha<2\pi$

$$\int_1^\infty \frac{dx}{(x-\cos\alpha)\sqrt{x^2-1}} = \underbrace{\int_1^2 \frac{dx}{(x-\cos\alpha)\sqrt{x^2-1}}}_{I_1} + \underbrace{\int_2^\infty \frac{dx}{(x-\cos\alpha)\sqrt{x^2-1}}}_{I_2}$$

<u>I_1 için</u> $\quad f(x) = \dfrac{1}{(x-\cos\alpha)\sqrt{x^2-1}}$, $1<x\leq 2$ ve $0<\alpha<2\pi$

$x=1$ de f fonksiyonunun sonsuz süreksizliği vardır. I_1 integrali 2. tip has olmayan integraldir.

$$\lim_{x\to 1^+} (x-1)^{1/2} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{(x-\cos\alpha)\cdot\sqrt{x+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}\,(1-\cos\alpha)} \neq 0, \ (\cos\alpha<1)$$

ve $p=\frac{1}{2}<1$ olduğundan I_1 integrali yakınsaktır.

<u>I_2 için</u> $\quad I_2$, 1. tip has olmayan integraldir.

$$\lim_{x\to\infty} x^2\cdot f(x) = \lim_{x\to\infty} x^2\cdot\frac{1}{(x-\cos\alpha)\cdot\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x\to\infty} \cancel{x^2}\frac{1}{\cancel{x^2}\left(1-\frac{\cos\alpha}{x}\right)\cdot\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}$$

$$= 1 \neq 0$$

ve $p=2>1$ olduğundan I_2 integrali yakınsaktır.

O halde verilen integral <u>Yakınsaktır.</u>

2) $\lim_{n\to\infty} \int_{-1/2}^{1/2} \frac{1-x^{n+1}}{1-x}\,dx = ?$

i) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $f_n : \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ denirse,

$\forall x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ için $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x} = f(x)$

olup, (f_n) dizisi $f(x) = \frac{1}{1-x}$ fonksiyonuna noktasal yakınsar.

Yine

$$\sup_{x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]} \left| \frac{1-x^{n+1}}{1-x} - \frac{1}{1-x} \right| = \sup_{x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]} \frac{|x|^{n+1}}{1-x} \leq$$

$$\leq \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

ve $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ olduğundan (f_n) dizisi $f(x) = \frac{1}{1-x}$

fonksiyonuna düzgün yakınsar.

ii) Yine $\forall n$ için f_n fonksiyonları $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ aralığı üzerinde

süreklidir.

O halde (i) ve (ii) sağlandığından

$\lim_{n\to\infty} \int_{-1/2}^{1/2} f_n(x)\,dx = \int_{-1/2}^{1/2} f(x)\,dx$ yazılır. Buradan

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-1/2}^{1/2} \frac{1-x^{n+1}}{1-x}\,dx = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{1-x}\,dx = -\ln|1-x| \Big|_{-1/2}^{1/2}$$

$$= -\ln\left|1-\frac{1}{2}\right| + \ln\left|1+\frac{1}{2}\right|$$

$$= \ln\frac{3}{2} - \ln\frac{1}{2} = \ln 3$$

3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{3n+4}\right)^2 x^n$

$a_n = \left(\dfrac{n+1}{3n+4}\right)^2$ denirse

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)^2}{(3n+4)^2} \cdot \frac{(3n+7)^2}{(n+2)^2} \right| = 1$$

olup, seri $|x| < 1$ ise yakınsak,

$|x| > 1$ ise ıraksaktır.

$\underline{x=1 \text{ ise}}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{3n+4}\right)^2$ pozitif terimli bir seridir.

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{3n+4}\right)^2 = \frac{1}{9} \neq 0$ olduğundan, genel terim

testinden dolayı seri ıraksaktır.

$\underline{x=-1}$ ise $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n+1}{3n+4}\right)^2$ olup, $a_n = (-1)^n \left(\dfrac{n+1}{3n+4}\right)^2$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_{2n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n+1}{6n+4}\right)^2 = \frac{1}{9} \neq 0$ ve benzer şekilde

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_{2n-1} = -\frac{1}{9} \neq 0$ olacağından

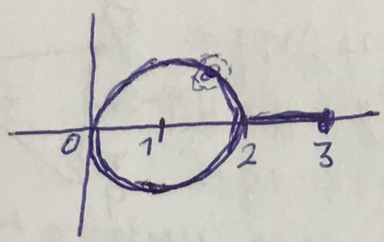
$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ yoktur. O halde seri $x=-1$ için de ıraksaktır.

Buna göre verilen serinin yakınsaklık yarıçapı $R=1$,

yakınsaklık aralığı $(-1,1)$ aralığıdır.

4- $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2-2x+y^2=0\}\cup\{(x,0)\in\mathbb{R}^2 \mid 2\le x\le 3\}$ kümesini çiziniz ve A^0, $\bar{A}$ ile ∂A kümelerini bulunuz

Çözüm. $x^2-2x+y^2=(x-1)^2-1+y^2=0 \Leftrightarrow (x-1)^2+y^2=1$ olduğundan birleşimi oluşturan birinci küme $(1,0)$ noktası merkezli birim çemberi belirler.



$A^0=\emptyset$ dır, çünkü $\forall x\in A$ için $B(x,\varepsilon)\subset A$ o.ş. şekilde hiç bir $\varepsilon>0$ yoktur.

$\bar{A}=A$ dır, çünkü A^c tümleyeni açıktır.

$\partial A=A$ dır, çünkü $\forall x\in A$ ve $\forall\varepsilon>0$ için $B(x,\varepsilon)\cap A\neq\emptyset \wedge B(x,\varepsilon)\cap(\mathbb{R}^2\setminus A)\neq\emptyset$ dir.

5- $E\subset\mathbb{R}^n$ olsun. $\partial E=E \Leftrightarrow E^0=\emptyset$ dır. İspatlayınız.

Çözüm. Önce $\partial E=E\Rightarrow E^0=\emptyset$ olduğunu gösterelim.

Eğer $E^0\neq\emptyset$ varsayılırsa

$$\exists x\in E^0\subset E \wedge \exists\varepsilon>0 \ni B(x,\varepsilon)\subset E \Rightarrow B(x,\varepsilon)\cap(\mathbb{R}^n\setminus E)=\emptyset$$

$$\Rightarrow x\notin\partial E \Rightarrow \partial E\neq E$$

olur. Bu isteneni verir.

Tersine $E^0=\emptyset$ olsun. O zaman

$$\partial E=\bar{E}\setminus E^0 \Rightarrow \partial E=\bar{E} \Rightarrow E\cap\partial E=E\cap\bar{E}=E\Rightarrow\partial E=E$$

olur.

6- Her $k=1,2,\dots$ için $x_k=(k-\sqrt{k^2+k},\ k^{1/k},\ 1/k)$ olmak üzere $\mathbb{R}^3$ te verilen (x_k) dizisinin limitini bulunuz.

$$\lim_{k\to\infty}(k-\sqrt{k^2+k})=\lim_{k\to\infty}\frac{(k-\sqrt{k^2+k})(k+\sqrt{k^2+k})}{k+\sqrt{k^2+k}}=\lim_{k\to\infty}\frac{k^2-(k^2+k)}{k+\sqrt{k^2+k}}$$

$$=\lim_{k\to\infty}\frac{-k}{k(1+\sqrt{1+(1/k)})}=-\frac{1}{2};$$

$$\lim_{k\to\infty}k^{1/k}=\lim_{k\to\infty}e^{\ln k^{1/k}}=\lim_{k\to\infty}e^{\frac{\ln k}{k}}=e^{\lim_{k\to\infty}\frac{\ln k}{k}}=e^0=1;$$

ve $\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}=0$ olduğundan, aranan limit $x=(-1/2,1,0)$.

2/

7- Bir $A \subset \mathbb{R}^n$ alt kümesi kapalıdır $\Leftrightarrow$ $A' \subset A$ dır. İspatlayınız.

Çözum. A kapalı olsun ve $A' \not\subset A$ varsayalım. A kapalı olduğundan $\mathbb{R}^n \setminus A$ açık ve $A' \not\subset A$ olduğundan $\exists x \in A' \ni x \notin A \; (x \in \mathbb{R} \setminus A)$ olur.

$\mathbb{R}^n \setminus A$ nın açık olmasından dolayı

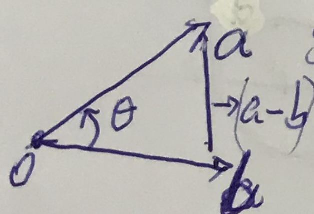
$$\exists \varepsilon > 0 \ni B(x, \varepsilon) \subset \mathbb{R}^n \setminus A$$

ve böylece $(B(x,\varepsilon) \setminus \{x\}) \cap A = \emptyset \Rightarrow x \notin A'$ gelişkisi oluşur. O halde varsayım yanlıştır, buna göre $A' \subset A$ olmalıdır.

Tersine $A' \subset A \Rightarrow A \cup A' \subset A \cup A \Rightarrow \bar{A} \subset A$ $\Rightarrow \bar{A} = A$ olur.

8- $\mathbb{R}^n$ de verilen sıfırdan farklı a ve b vektorleri arasındaki θ ise $\cos\theta = \dfrac{\langle a, b \rangle}{\|a\| \cdot \|b\|}$ olduğunu gösteriniz.

Çözum. a, b ve $a-b$ vektörleri, şekildeki gibi sırasıyla kenar uzunlukları $\|a\|$, $\|b\|$ ve $\|a-b\|$ olan bir üçgen oluşturur.



Kosinüs teoremine göre

$$\|a-b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 - 2\|a\| \cdot \|b\| \cdot \cos\theta$$

ve iç-çarpım kullanarak

$$\|a-b\|^2 = \langle a-b, a-b \rangle = \langle a, a \rangle + \langle b, b \rangle - 2\langle a, b \rangle$$
$$= \|a\|^2 + \|b\|^2 - 2\langle a, b \rangle$$

olur. Buradan

$$\langle a, b \rangle = \|a\| \cdot \|b\| \cdot \cos\theta$$

elde edilir.